Klausur zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2014/15

Prof. Dr. Norbert Dragon

13.02.2015, 15-18 Uhr — PD Dr. Michael Flohr

Name: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Studiengang: ____________________

#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	Σ
Pkte							
Korr							

[K0] *Kurzfragen* **[1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Die Matrix M erhalte alle Längen, $|M\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2$. Welche Determinante hat M ?

(b) Unter welcher Invarianz gilt Impulserhaltung?

(c) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Energie E und Impuls $\vec{p}$ eines masselosen relativistischen Punktteilchens an ($c = 1$).

(d) Eine Uhr bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit vom Ursprung $(0, \vec{0})$ zum Ereignis $(t, \vec{x})$. Welche Zeit ist für die Uhr vergangen?

[K1] *Summenkonvention* **[2 + 1 + 2 = 5 Punkte]**

Für das ϵ-Symbol gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} \,.$$

Berechnen Sie daraus unter Beachtung der Einstein'schen Summenkonvention

(a) $\epsilon_{ijk}\delta_{kn}\epsilon_{lmn}$,

(b) $\epsilon_{ijk}\delta_{lm}\epsilon_{lmk}$ und

(c) $\epsilon_{imn}\epsilon_{jmn}$.

[K2] *Eigenwerte und Eigenvektoren* **[2 + 2 + 2 = 6 Punkte]**

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m bewege sich in der xy-Ebene unter der Wirkung der Kraft

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 5x - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix} .$$

(a) Wie lautet das zugehörige Potential $V(x, y)$?

(b) An welchen Orten zeigt die Kraft zum Ursprung?

(c) Wie lauten die Lösungen der Bewegungsgleichungen, die nur solche Orte durchlaufen? *Hinweis*: Die Newton'sche Bewegungsgleichung heißt $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}(t)$ mit $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

[K3] *Erhaltungssätze* **[1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Potential $V(\vec{x}) = -\frac{1}{4}\kappa/r^4$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Warum sind die Energie E und der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten?

(b) Warum ist die Bahn eben?

(c) Geben Sie die Energie und den Drehimpuls in Kugelkoordinaten an. *Hinweis*: z-Achse gut wählen!

(d) Kombinieren Sie beide Erhaltungssätze zu einem Energiesatz, in dem nur der Freiheitsgrad $r(t)$ auftritt.

[K4] *Kräfte und Potentiale* **[3 + 2 = 5 Punkte]**

Prüfen Sie, ob die folgenden Kräfte ein Potential besitzen. Falls ja, berechnen Sie das Potential und skizzieren Sie die Äquipotentiallinien in der xy-Ebene, d.h. für $z = 0$.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}, 0)$,

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, -zx, xy)$

Hinweis: $\partial_u \arcsin(uv) = \frac{v}{\sqrt{1-u^2v^2}}$.

[K5] *Wegintegrale* **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Berechnen Sie die Weglänge $\ell[\Gamma] = \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ für die folgenden Bahnkurven:

(a) $\Gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, \sqrt{1 - (\omega t)^2})$ zwischen $\underline{t} = 0$ und $\bar{t} = 1/\omega$.
Hinweis: Die Ableitung von $\arcsin x$ ist $1/\sqrt{1 - x^2}$.

(b) $\Gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = (at^2, 0, t)$ zwischen $\underline{t} = 0$ und $\bar{t} = 1$.
Hinweis: Die Ableitung von $F(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 + x^2} + \ln|x + \sqrt{1 + x^2}|)$ ist $\sqrt{1 + x^2}$.